Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

Jueves 15 de noviembre de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

8818 – 7229

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 13]

Considere la operación binaria $*$ definida sobre el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ del siguiente modo $a*b = a + b + ab$.

(a) Muestre que la operación $*$ es

(i) conmutativa;

(ii) asociativa. [5]

(b) Resuelva la ecuación $a*b = -1$. [3]

Sea $S = \{x \in \mathbb{Q} | x \neq -1\}$.

(c) Muestre que $\{S, *\}$ es un grupo abeliano. [5]

2. [Puntuación máxima: 8]

Considere dos subconjuntos X e Y de un conjunto universal U.

(a) Utilice las leyes de De Morgan para demostrar que $\left[\left(X' \cup Y'\right)' \cap Y'\right]' = U$. [4]

Sea $X = \left\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = n^2\right\}$ e $Y = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq m + n \leq 6\}$.

(b) Enumere todos los elementos de $X \cap Y$. [4]

3. [Puntuación máxima: 10]

Una relación R está definida sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidas por
$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow 3(a - c) = 2(b - d)$.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia. [8]

(b) Halle la clase de equivalencia que contiene a $(1, 2)$ y descríbala geométricamente. [2]

4. [Puntuación máxima: 9]

Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidas por

$$f((x, y)) = (x + y, x - y) \text{ y } g((x, y)) = (xy, x + y).$$

(a) Halle

(i) $(f \circ g)((x, y))$;

(ii) $(g \circ f)((x, y))$. [5]

(b) Indique, aportando una razón que lo justifique, si f y g son conmutables. [1]

(c) Halle la inversa de f. [3]

5. [Puntuación máxima: 10]

Considere un grupo finito $\{G, *\}$. Sea H un subgrupo de G de orden m tal que $G \setminus H \neq \varnothing$. Sea a un elemento fijo de $G \setminus H$. Considere ahora el conjunto $A = \{a*h \mid h \in H\}$.

(a) Muestre que $A \cap H = \varnothing$. [3]

Considere la función $f : H \to A$ definida por $f(h) = a*h$.

(b) Muestre que f es una función biyectiva. [4]

(c) Halle el número de elementos que hay en el conjunto $A \cup H$. [3]